TODOS LOS EJERCICIOS DEBEN ESTAR RAZONADOS

1.- Demuestra usando inducción matemática la siguiente igualdad

$$2 - 2.7 + 2.7^2 - \dots + 2(-7)^n = \frac{(1 - (-7)^{n+1})}{4} \quad n \geq 0 \quad (1.5 \text{ p})$$

2.- Sabemos que $(G, *)$ es grupo y que S es subgrupo de G . Comprobar que la relación R definida en G por

$$a R b \Leftrightarrow a^{-1} * b \in S$$

es una relación de equivalencia, explicando en cada paso las propiedades usadas (1 p)

3.- Conocemos los siguientes datos para los subconjuntos A, B, C de un conjunto universal U .

$$\text{Card}(U) = 692, \text{card}(A) = 300, \text{card}(B) = 230, \text{card}(C) = 370, \text{card}(A \cap B) = 150, \\ \text{card}(B \cap C) = 90, \text{card}(A \cap C) = 180, \text{card}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 172$$

a) ¿Es correcto afirmar que $\text{card}(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) = 30$?

b) Calcular $\text{Card}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$ (1 p)

4.- Dividir 111 en tres partes tales que una sea múltiplo de 2, otra de 5 y la otra de 7, de tal forma que el triple de la primera más el doble de la segunda más cinco veces la tercera sumen 400. Determinar si hay alguna solución a este problema en que las tres partes obtenidas sean positivas. (1.5 p)

5.- a) ¿Cuántos números enteros positivos podemos expresar como un producto de nueve números primos seleccionados del conjunto $\{2, 3, 5, 7, 11\}$?

b) ¿De los números anteriores, cuántos son múltiplos de 2? (1.5 p)

6.- En una facultad hay que realizar siete exámenes finales. Si los cursos se han denominado A, B, C, D, E, F, G y los cursos A y B ; A y C ; A y D ; A y G ; B y C ; B y D ; B y E ; B y G ; C y D ; C y F ; C y G ; D y E ; D y F ; E y F ; E y G ; F y G tienen alumnos comunes, ¿cómo se pueden organizar los exámenes finales para que ningún estudiante tenga dos exámenes a la vez. Explica el algoritmo que usas para resolver el problema. (1 p)

7.- a) Escribe la fórmula de una relación de recurrencia para el número de formas de subir una escalera con n peldaños, si en cada paso se puede subir uno, dos o tres peldaños de la escalera.

b) Halla el término general de la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 7$ (1 p)

8.- Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y los subespacios

$$F = \langle (1, 0, 1, a), (1, 0, a, 1), (1, a, 0, 1), (a, 1, 0, 1) \rangle$$

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0; z + t = 0\}$$

a) Calcular la dimensión de F según los valores de a

b) Si $a = 0$ calcular una base, dimensión y ecuaciones de $F + H$

c) Para $a = 1$, encontrar los vectores de F que son linealmente independientes y completar este conjunto hasta dar una base de $\mathbb{R}^4$ (1.5 p)

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - 4 + 3$$