

Respuestas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a															
b															
c															

Marcar la respuesta correcta en cada una de las preguntas que siguen. NO OLVIDAR trasladar las respuestas marcadas a la tabla que está situada en la parte superior (si no es así, no se corregirá la prueba). RECUERDE que las preguntas incorrectas RESTAN un tercio.

- Sea X una v.a. de tipo continuo:
 - $f(x) = P(X < x)$
 - $f(x) = P(X = x)$
 - $f(x) = \delta F(x)/\delta x$
- Sean $X_i \in B(p = 0.5)$ independientes, la v.a. $X = \sum_{i=1}^{60} X_i$, tiene por distribución:
 - $N(\mu = 0 ; \sigma^2 = 1)$
 - $P(\lambda = 30)$
 - $N(\mu = 30 ; \sigma^2 = 15)$
- Si $X \in N(\mu = 0, \sigma = 2)$, la v.a. $Y = 3X + 1$ tiene por distribución
 - $N(\mu = 1, \sigma^2 = 2^2)$
 - $N(\mu = 1, \sigma^2 = 37)$
 - $N(\mu = 1, \sigma^2 = 36)$
- Sea $Z_1 \in N(0,1)$, independiente de $Z_2 \in N(0,1)$ y sea $x = \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2^2}}$, entonces:
 - $X^2 \in F(1,2)$
 - $X \in t(1)$
 - $X \in N(0,1)$
- En una distribución F de Fisher-Snedecor con 5 grados de libertad en el numerador y 7 en el denominador, la $P(X = 7.4604)$ es:
 - 0
 - 0.99
 - 0.01
- El estadístico media muestral, obtenido por m.a.s. en una población de media μ y desviación típica σ , tendrá por distribución:
 - Siempre una $N(\mu, \sigma^2/n)$
 - Siempre una $N(\mu, \sigma^2)$
 - Bajo determinadas circunstancias una $N(\mu, \sigma^2/n)$
- Un estimador asintóticamente insesgado es aquel que:
 - Su varianza tiende a cero al tender n a infinito
 - Su esperanza coincide con la esperanza del parámetro a estimar
 - Su esperanza tiende al parámetro a estimar cuando aumenta el tamaño muestral considerablemente
- Un estimador consistente es aquel que:
 - Tiene varianza mínima
 - Bajo ciertas condiciones, su varianza tiende a cero
 - Es asintóticamente normal

Un investigador sospecha que el consumo de ciertas sustancias estimulantes entre jóvenes influye negativamente en su rendimiento académico. Para comprobarlo ha diseñado el siguiente experimento: A un grupo de 15 alumnos se les puso dos pruebas similares, una tras Consumir (variable S) y otra Sin dicho Consumo (variable N).

Se proporciona la siguiente información muestral acerca de las puntuaciones:

$$\sum_{i=1}^{15} N_i = 80.7 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{15} N_i^2 = 471.55$$

$$\sum_{i=1}^{15} S_i = 78.43 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{15} S_i^2 = 451.02$$

Considerando que las calificaciones poblacionales en ambos grupos (Consumiendo y Sin Consumir) siguen distribuciones normales de medias y varianzas las muestrales,

9. Entre los alumnos que Consumen sustancias, ¿cuál es la probabilidad de obtener más de un 6.5 entre aquellos que obtienen más de 6 puntos?
 - a) 0.2206
 - b) 0.3192
 - c) 0.6911
10. Entre los alumnos que No Consumen, ¿cuál es la probabilidad de que tengamos calificar a 6 alumnos para encontrar 3 con puntuación superior a 6?
 - a) 0.3483
 - b) 0.1169
 - c) 0.2339
11. Si consideramos un grupo de 150 alumnos que No Consumen, ¿cuál es la probabilidad de que 50 de ellos superen los 6 puntos?
 - a) 0.0629
 - b) 0
 - c) 0.05

Suponiendo ahora que las medias y varianzas poblacionales son desconocidas en ambos grupos (Consumiendo y Sin Consumir), suponiendo normalidad y con ayuda de la muestra,

12. Se desea estimar la calificación media poblacional de aquellos alumnos que No Consumieron con una precisión de ± 0.5 , y con una confianza del 95%. ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario?. Redondeando al entero superior.
 - a) 47
 - b) 46
 - c) 52
13. Supuesto que las varianzas poblacionales en ambos grupos de alumnos (Consumiendo y Sin Consumir), son iguales, el valor estimado de la varianza poblacional es:
 - a) 2.7974
 - b) 2.7297
 - c) 2.4922
14. En el mismo supuesto del apartado anterior, y con un nivel de significación del 5%, ¿son iguales las calificaciones medias en ambos grupos de alumnos?
 - a) No, el grupo que No Consume tiene mayor puntuación
 - b) Si
 - c) No, el grupo que Consume tiene mayor puntuación
15. Sea X una v.a. con función de densidad $f(x) = K e^{Kx}$; $-1 \leq X \leq 1$, siendo K un parámetro desconocido. Para estimarlo, se toma una muestra de tamaño 10 de la que resulta una media muestral de 0.5. Aplicando el método de máxima verosimilitud, ¿Qué valor se estimaría para el parámetro K?
 - a) 2
 - b) -2
 - c) 0,5

Ejercicios 9-15.- Un investigador sospecha que el consumo de ciertas sustancias estimulantes entre jóvenes influye negativamente en su rendimiento académico. Para comprobarlo ha diseñado el siguiente experimento: A un grupo de 15 alumnos se les puso dos pruebas similares, una tras Consumir (variable C) y otra Sin dicho Consumo (variable SC). Los resultados de las calificaciones son:

Nº de individuo	Sin Consumo (SC)	Con Consumo (C)
1	6.5	6.2
2	7	7.1
3	5	4.7
4	6.3	6.1
5	4.3	4.5
6	3.5	3.7
7	7	7
8	3.7	3.2
9	8	7.5
10	2.7	2.1
11	6	5.7
12	6.7	7
13	3	2.7
14	5	4.8
15	6	6.1

Considerando que las calificaciones poblacionales en ambos casos siguen distribuciones normales de medias y varianzas las muestrales,

1. Entra los alumnos que consumen sustancias, ¿cuál es la probabilidad de obtener mas de un 6.5 entre aquellos que obtienen mas de 6 puntos?.
2. Entre los alumnos que no consumen, ¿cuál es la probabilidad de que tengamos calificar a 6 alumnos para encontrar 3 con puntuación superior a 6?.
3. Si consideramos un grupo de 150 alumnos que no consumen, ¿cuál es la probabilidad de que 50 de ellos superen los 6 puntos?.

Suponiendo ahora que las medias y varianzas poblacionales son desconocidas en ambos grupos, suponiendo normalidad y con ayuda de la muestra,

4. Si se desea estimar la calificación media poblacional de aquellos alumnos que no consumieron con una precisión de ± 0.5 , y con una confianza del 95%. ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario?.
5. Con un nivel de significación del 5%, ¿son iguales las calificaciones medias en ambos grupos de alumnos (consumiendo y sin consumir)?.
6. Sea X una v.a. con función de densidad $f(x) = K e^{Kx}$; $-1 < X < 1$, siendo K un parámetro desconocido. Para estimarlo, se obtiene una muestra de tamaño 10 de la que resulta una media de 0.5. Aplicando el método de máxima verosimilitud, ¿Qué valor tomaría el parámetro K?.

**CAMBIA LIGERAMENTE LA NOMENCLATURA DE LOS
SUCESOS DE ESTE EJERCICIO CON LA PROPUESTA
EN EL 2º PARCIAL**

La variable C equivale a la variable S del parcial
La variable SC equivale a la variable N del parcial

Considerando que las calificaciones poblacionales en ambos casos siguen distribuciones normales de medias y varianzas las muestrales,

De acuerdo con la muestra: $\sum_{i=1}^{15} SC_i = 80.7$; $\sum_{i=1}^{15} SC_i^2 = 471.55$
 $\sum_{i=1}^{15} C_i = 78.43$; $\sum_{i=1}^{15} C_i^2 = 451.02$

$$\bar{C} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} C_i = \frac{78.43}{15} = 5.2286$$

$$S_C^2 = \left(\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} C_i^2 \right) - \bar{C}^2 = \frac{451.02}{15} - 5.2286^2 = 2.7297 \Rightarrow S_C = 1.6521$$

$$\overline{SC} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} SC_i = \frac{80.7}{15} = 5.38$$

$$S_{SC}^2 = \left(\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} SC_i^2 \right) - \overline{SC}^2 = \frac{471.55}{15} - 5.38^2 = 2.4922 \Rightarrow S_{SC} = 1.5786$$

1. Entre los alumnos que consumen sustancias, ¿cuál es la probabilidad de obtener mas de un 6.5 entre aquellos que obtienen mas de 6 puntos?.

$$\text{Se pide: } P\left(C > 6.5 \middle/ C > 6\right) = \frac{P(C > 6.5) \cap P(C > 6)}{P(C > 6)} = \frac{P(C > 6.5)}{P(C > 6)}$$

$$P(C > 6.5) = P\left(Z > \frac{6.5 - 5.2286}{\sqrt{2.7297}}\right) = P(Z > 0.769) = 0.2206$$

$$P(C > 6) = P\left(Z > \frac{6 - 5.2286}{\sqrt{2.7297}}\right) = P(Z > 0.467) = 0.3192$$

$$\text{luego: } P\left(C > 6.5 \middle/ C > 6\right) = \frac{P(C > 6.5)}{P(C > 6)} = \frac{0.2206}{0.3192} = 0.6911$$

2. Entre los alumnos que no consumen, ¿cuál es la probabilidad de que tengamos calificar a 6 alumnos para encontrar 3 con puntuación superior a 6?

Si definimos como “éxito” el No Consumir, a un alumno elegido al azar se le puede aplicar una v.a. $X_i \in B(p)$, siendo:

$$p = P(SC > 6) = P\left(Z > \frac{6 - 5.38}{\sqrt{2.4922}}\right) = P(Z > 0.3927) = 0.3483$$

Al suceso: Si para encontrar 3 que No Consuman, tenemos que calificar a 6 para encontrar una puntuación superior a 6, se le aplica una v.a.

$$X \in \text{bn}(K = 3; p = 0.3483)$$

y la probabilidad pedida es:

$$P(X = 6) = \binom{6-1}{3-1} \times 0.3483^3 \times (1 - 0.3483)^{6-3} = 0.1169$$

3. Si consideramos un grupo de 150 alumnos que no consumen, ¿cuál es la probabilidad de que 50 de ellos superen los 6 puntos?

Al igual que en el apartado anterior, si definimos como “éxito” el No Consumir, a un alumno elegido al azar se le puede aplicar una v.a. $X_i \in B(p = 0.3483)$

La v.a. “Nº de alumnos que superan los 6 puntos” tiene por distribución:

$$X = \sum_{i=1}^{150} X_i \in b(n = 150; p = 0.3483) \xrightarrow{\text{T.C.L.}} X^* \in N(\mu = np; \sigma^2 = npq) \equiv \\ \equiv N(\mu = 52.245; \sigma^2 = 34.048)$$

y la probabilidad pedida es:

$$P(X = 50) \approx P(50 - 0.5 \leq X^* \leq 50 + 0.5) = P\left(\frac{49.5 - 52.245}{\sqrt{34.048}} \leq Z \leq \frac{50.5 - 52.245}{\sqrt{34.048}}\right) = \\ = P(-0.47 \leq Z \leq -0.30) = P(Z \geq 0.30) - P(Z \geq 0.47) = 0.3821 - 0.3192 = 0.0629$$

Suponiendo ahora que las medias y varianzas poblacionales son desconocidas en ambos grupos, suponiendo normalidad y con ayuda de la muestra,

Es decir: v.a. $C \equiv$ “Calificaciones Con Consumo”,

$$C \in N(\mu_C; \sigma_C^2)$$

v.a. $SC \equiv$ “Calificaciones Sin Consumo”,

$$SC \in N(\mu_{SC}; \sigma_{SC}^2)$$

- 4. Se desea estimar la calificación media poblacional de aquellos alumnos que no consumieron con una precisión de ± 0.5 , y con una confianza del 95%. ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario?**

$$I_{0.95}(\mu_{SC}) = \left(\overline{SC} - t_{0.025;(14)} \frac{S_{SC}}{\sqrt{N-1}}; \overline{SC} + t_{0.025;(14)} \frac{S_{SC}}{\sqrt{N-1}} \right) = (\overline{SC} - \varepsilon; \overline{SC} + \varepsilon)$$

$$\varepsilon = t_{0.025;(14)} \frac{S_{SC}}{\sqrt{N-1}}, \text{ donde: } \begin{cases} \varepsilon = 0.5 \\ t_{0.025;(14)} = 2.145 \text{ y } N \text{ el tamaño muestral pedido.} \\ S_{SC} = 1.5786 \end{cases}$$

$$\text{Realizando operaciones: } 0.5 = 2.145 \times \frac{1.5786}{\sqrt{N-1}} \Rightarrow N \approx 47$$

- 5. Con un nivel de significación del 5%, ¿son iguales las calificaciones medias en ambos grupos de alumnos (consumiendo y sin consumir)?**

Se nos pide el siguiente test de hipótesis: $\begin{cases} H_0 : \mu_C = \mu_{SC} \\ H_1 : \mu_C \neq \mu_{SC} \end{cases}$,

El estadístico a utilizar en el contraste inicial será pues:

$$T = \frac{\overline{C} - \overline{SC}}{S \sqrt{\frac{1}{n_C} + \frac{1}{n_{SC}}}} \in t_{(n_C + n_{SC} - 2)}, \text{ siendo } S^2 = \frac{n_C S_C^2 + n_{SC} S_{SC}^2}{n_C + n_{SC} - 2}, \text{ la estimación de la}$$

varianza poblacional desconocida e igual para ambas poblaciones.

La región de aceptación, para H_0 cierta es:

$$C_0 = \left(-t_{0.025;(n_C + n_{SC} - 2)}; t_{0.025;(n_C + n_{SC} - 2)} \right).$$

De acuerdo con los resultados muestrales:

$$S^2 = \frac{15 \times 2.7297 + 15 \times 2.4922}{15 + 15 - 2} = 2.7974 \Rightarrow S = 1.6725$$

$$T = \frac{5.2286 - 5.38}{1.6725 \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}}} = -0.2479$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{0.025; (28)} = 2.048 \text{ luego: } C_0 = (-2.048; 2.048)$$

Y como $T \in C_0$ aceptamos la igualdad de medias en ambos grupos.

6. Sea X una v.a. con función de densidad $f(x) = K e^{Kx}$; $-1 < X < 1$, siendo K un parámetro desconocido. Para estimarlo, se obtiene una muestra de tamaño 10 de la que resulta una media de 0.5. Aplicando el método de máxima verosimilitud, ¿Qué valor tomaría el parámetro K ?

Calculo del estimador de K aplicando el método de máxima verosimilitud

➤ Función de verosimilitud:

$$L(\vec{X}, K) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = K e^{Kx_1} \times K e^{Kx_2} \times \dots \times K e^{Kx_n} = K^n e^{K \sum_{i=1}^n x_i}$$

➤ Logaritmo neperiano de la función de verosimilitud:

$$\text{Ln } L(\vec{X}, K) = \text{Ln} \left(K^n e^{K \sum_{i=1}^n x_i} \right) = \text{Ln}(K^n) + K \sum_{i=1}^n x_i$$

➤ Derivada de la función anterior respecto del parámetro igualada a cero:

$$\frac{\partial \text{Ln } L(\vec{X}, K)}{\partial K} = \frac{n}{K} + \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

➤ Despejando el parámetro:

$$\frac{n}{K} = -\sum_{i=1}^n x_i ; \frac{n}{-\sum_{i=1}^n x_i} = K \Rightarrow \hat{K} = -\frac{1}{\bar{X}}$$

Como la media muestral resulta ser de 0.5, la estimación máximo verosimil

del parámetro K es: $\hat{K} = -\frac{1}{\bar{X}} = -\frac{1}{0.5} = -2$