Escuela Politécnica Superior de Córdoba, UCO. Departamento de Estadística,
Estadística. Grado en Ingeniería Informática.
Curso 2015-2016
Examen Final Problemas. 1ª Convocatoria, Enero 2016

Nombre:____ DNI nº:_________________
Grupo de Teoría: _________ Modelo A

SE PUNTUARÁ EL ORDEN, CLARIDAD Y LIMPIEZA DEL EXAMEN
La puntuación de cada apartado figura en el mismo
(Realizar todos los cálculos truncando a 4 decimales)

Se sabe que la demanda en una ciudad de un cierto producto sigue una variable aleatoria X, cuya función de Distribución es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad X \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2K_1} & ; \quad 0 < X < 5 \\ \dfrac{-x^2+20x-50}{K_2} & ; \quad 5 \le X \le 10 \\ 1 & ; \quad X > 10 \end{cases}$$

(VER LIBRO DE FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA: PROBLEMAS. EJERCICIO 6.10)

Un comerciante dispone de 2.5 unidades de dicho producto. La venta de una unidad de producto, le supone un beneficio de 3 unidades monetarias, pero sufre una pérdida de una unidad monetaria por cada unidad de producto no vendido.

1. **(0.5) Determinar los valores de K_1 y de K_2 para que F(x) sea la verdadera Función de Distribución.**
2. **(1) Calcular la probabilidad de que el beneficio esté comprendido entre 5 y 10 unidades monetarias.**
3. **(1.5) Calcular la probabilidad de que el beneficio del comerciante no difiera de su beneficio medio en más de 1.5 veces su desviación típica.**

En la ciudad en estudio, existen dos cooperativas, la primera formada por 50 comerciantes como el descrito, y la segunda formada por 40 comerciantes cuyos beneficios siguen una distribución uniforme en el intervalo 5-25.

4. **(1) Calcular la probabilidad de que al menos 37 comerciantes de la 1ª cooperativa obtengan beneficios entre 5 y 10 unidades monetarias.**
5. **(0.5) ¿En qué cooperativa los beneficios son más homogéneos?**
6. **(1) En la ciudad en estudio, se ha elegido a un comerciante al azar y se ha comprobado que tiene unos beneficios comprendidos en 5 y 10 unidades monetarias, ¿probabilidad de que pertenezca a la 2ª cooperativa?.**

El gerente de la 2ª cooperativa asegura que sus cooperativista obtienen mayores beneficios que los de la 1ª, y para apoyar tal afirmación se toman sendas muestras en ambas cooperativas que arrojan los siguientes resultados:

$$\sum_{i=1}^{30} X_{1_i} = 470 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30} X_{1_i}^2 = 8622 \; ; \quad \sum_{i=1}^{25} X_{2_i} = 387 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{25} X_{2_i}^2 = 6803$$

7. **(0.5) En el supuesto de que las varianzas poblacionales son iguales, ¿Cuánto vale dicha varianza?.**
8. **(1) ¿Lleva razón el citado gerente?. Nivel de significación del 2.5%**

Se estudia en la ciudad en cuestión la disponibilidad de dicho producto: (1 ≡ "hay existencias", 0 ≡ "No hay existencias" -1 ≡ "No hay existencias y se ha realizado un pedido a fábrica"), y se ha llegado a la conclusión que sigue una v.a. cuya función de probabilidad es:

$$P(X=x) = 2^{1-x^2} p^{1-x} (1-p)^{1+x} \; ; \; X = -1, 0, 1$$

de la que se sabe que: $\mu = 1-2p$ y $\sigma^2 = 2p(1-p)$ y siendo p un parámetro a determinar.

(ver Boletín nº 5 ejercicio 15)

Tomada una muestra aleatoria simple:

1, 1, 0, -1, 0, 1, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, 1, 1, -1, -1, 0

9. **(1) Valor del parámetro p viable con la muestra.**
10. **(1) ¿El estimador obtenido en el apartado anterior es Consistente?.**

La 2ª Cooperativa contrata a un becario y le pide que obtenga un modelo de regresión para estimar los Beneficios en función de la Disponibilidad del producto. El becario y para una muestra de 8 observaciones proporciona los dos modelos siguientes:

$$\begin{cases} \text{recta } B/D \rightarrow D = 2\hat{B} - 1 \\ \text{recta } D/B \rightarrow B = 3\hat{D} - 9 \end{cases}$$

también proporciona los residuos correspondientes al primero de ellos, cuyos resultados son:

D_i	-1	-1	0	-1	1	1	1	0
$e_i(B/D)$	10	-8	2	-4	6	2	-3	-5

11. **(1) Razonando la respuesta, ¿son posibles los resultados facilitados por el becario?**

SOLUCIÓN:

1. **(0.5) Calcularemos en primer lugar los valores de las constantes K_1 y de K_2 para que la función:**

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad X\le 0 \\ \dfrac{x^2}{2K_1} & ; \quad 0<X<5 \\ \dfrac{-x^2+20x-50}{K_2} & ; \quad 5\le X\le 10 \\ 1 & ; \quad X>10 \end{cases}$$

sea una verdadera Función de Distribución:

- ✓ $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$
- ✓ $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$
- ✓ No decreciente $\forall\Re \Rightarrow K_1>0$ y $K_2>0$
- ✓ Continua por la derecha:

$$➢\ F(0)=\lim_{h\to 0} F(0+h) \Rightarrow \begin{cases} F(0)=0 \\ \lim_{h\to 0} F(0+h)=\dfrac{(0+h)^2}{2K_1}=0 \end{cases}$$

para los posibles valores de K_1 siempre es continua por la derecha.

$$➢\ F(10)=\lim_{h\to 0} F(10+h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(10)=\dfrac{-10^2+20\times 10-50}{K_2} \\ \lim_{h\to 0} F(10+h)=1 \end{cases} \Rightarrow K_2=50$$

Cálculo de la función de densidad: $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}\ \forall\Re$

- ✓ $X\begin{cases}\le 0 \\ \ge 10\end{cases} \Rightarrow f(x)=0$
- ✓ $0<X<5 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x}{K_1}$
- ✓ $5\le X\le 10 \Rightarrow f(x)=\dfrac{-2x+20}{50}=\dfrac{10-x}{25}$

Es decir: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{K_1} & 0<X<5 \\ \dfrac{10-x}{25} & 5\le X\le 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

Cálculo de K_1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^5 \frac{x}{K_1}dx+\int_5^{10}\frac{10-x}{25}dx=1 \Rightarrow K_1=25$$

Por tanto:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{25} & 0<X<5 \\ \dfrac{10-x}{25} & 5\le X\le 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \text{ y } F(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad X\le 0 \\ \dfrac{x^2}{50} & ; \quad 0<X<5 \\ \dfrac{-x^2+20x-50}{50} & ; \quad 5\le X\le 10 \\ 1 & ; \quad X>10 \end{cases}$$

(VER LIBRO DE FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA: PROBLEMAS. EJERCICIO 6.10)

2. **(1) Calcular la probabilidad de que el beneficio esté comprendida entre 5 y 10 unidades monetarias.**

Sea B la variable aleatoria que mide el beneficio del comerciante, y de acuerdo con el enunciado:

$$B=3X+(-1)Y$$

siendo: X ≡ "Número de unidades vendidas",
Y ≡ "Número de unidades no vendidas" ⇒ $Y = 2.5 - X$

Por tanto la v.a. B se obtiene por transformación lineal de la variable X de acuerdo con la ecuación:

$$B=4X-2.5$$

La probabilidad pedida será:

$$P(5<B<10)=P[5<(4X-2.5)<10]=P\left(\frac{5+2.5}{4}<X<\frac{10+2.5}{4}\right)=P(1.875<X<3.125)=$$

$$=F(3.125)-F(1.875)=\frac{3.125^2-1.875^2}{50}=0.125$$

O bien: $P(5<B<10)=P(1.875<X<3.125)=\int_{1.875}^{3.125}\dfrac{x}{25}dx=\dfrac{3.125^2-1.875^2}{50}=0.125$

3. **(1.5) Calcular la probabilidad de que el beneficio del comerciante no difiera de su beneficio medio en más de 1.5 veces su desviación típica**

Se nos pide:

$$P\left(\left|B-\mu_B\right|<1.5\sigma_B\right)=P\left(\mu_B-1.5\sigma_B<B<\mu_B+1.5\sigma_B\right)$$

se ha de calcular por tanto en primer lugar el valor de la media y de la desviación típica de la variable aleatoria B ≡ "Beneficio del comerciante".

$$\mu_B=E(B)=E(4X-2.5)=4\,E(X)-2.5$$
$$\sigma_B^2=V(B)=V(4X-2.5)=4^2\,V(X)$$

- ✓ Cálculo de la media de la v.a. X:

$$\mu_X=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx=\int_0^5 x\,\frac{x}{25}\,dx+\int_5^{10}x\,\frac{10-x}{25}\,dx=5$$

- ✓ Cálculo de la varianza de la v.a. X:

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$$
$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,f(x)\,dx=\int_0^5 x^2\,\frac{x}{25}\,dx+\int_5^{10}x^2\,\frac{10-x}{25}\,dx=29.1\widehat{6}$$
$$V(X)=29.1\widehat{6}-5^2=4.1\widehat{6}$$

por tanto la media y la varianza de la v.a. B serán:

$$E(B)=4\times5-2.5=17.5$$
$$V(B)=4^2\times4.1\widehat{6}=66.\widehat{6}\Rightarrow\sigma_B=8.165$$

Por tanto la probabilidad pedida será:

$$P\left(\left|B-\mu_B\right|<1.5\,\sigma_B\right)=P\left(\mu_B-1.5\,\sigma_B<B<\mu_B+1.5\,\sigma_B\right)=$$
$$=P\left(17.5-1.5\times8.165<B<17.5+1.5\times8.165\right)=$$
$$=P\left(5.2525<B<29.7475\right)=\int_{5.2525}^{29.7475}f(b)\,db=.......$$

$$B\in D\left(\mu_B=17.5\,;\,\sigma_B^2=66.\widehat{6}\right)$$

Como desconocemos la función de densidad y la función de Distribución de la variable B, expresaremos la v.a. B en función de la v.a. X según su transformación lineal $B=4X-2.5$, igual que se ha hecho en el apartado anterior.

$$P\left(\left|B-\mu_B\right|<1.5\,\sigma_B\right)=P\left(5.2525<B<29.7475\right)=P\left(5.2525<4X-2.5<29.7475\right)=$$
$$=P\left(\frac{5.2525+2.5}{4}<X<\frac{29.7475+2.5}{4}\right)=P\left(1.9381<X<8.062\right)=$$
$$=F_X(8.062)-F_X(1.9381)=0.9248-0.0751=0.8497$$

En la ciudad en estudio, existen dos cooperativas, la primera formada por 50 comerciantes como el descrito, y la segunda formada por 40 comerciantes cuyos beneficios siguen una distribución uniforme en el intervalo 5-25.

4. **(1) Calcular la probabilidad de que al menos 37 comerciantes de la 1ª cooperativa obtengan beneficios entre 5 y 10 unidades monetarias.**

La distribución de la v.a. que mide si un comerciante cualquiera perteneciente a la 1ª cooperativa tiene un Beneficio entre 5 y 10 unidades monetarias es:

$$C_i\in B\left(p=0.125\right)$$

En el conjunto de los 50 comerciantes de la 1ª cooperativa, la v.a. C medirá cuantos comerciantes tienen un Beneficio entre 5 y 10 unidades monetarias, con distribución:

$$C=\sum_{i=1}^{50}C_i\in b\left(n=50;p=0.125\right)$$

y la probabilidad pedida será:

$$P\left(C\geq37\right)=\sum_{c=37}^{50}\binom{50}{c}\times0.125^c\times0.875^{50-c}=.......$$

Pero:

$$C\in b\left(n=50;p=0.125\right)\xrightarrow[n\geq30;\,p>0.1]{}C^*\in N\left(\mu=50\times0.125\,;\,\sigma^2=50\times0.125\times0.875\right)$$

$$C^*\in N\left(\mu=6.25\,;\,\sigma^2=5.4687\right)$$

y la probabilidad pedida:

$$P\left(C\geq37\right)\approx P\left(C^*\geq37-0.5\right)=P\left(Z\geq\frac{36.5-6.25}{\sqrt{5.4687}}\right)=P\left(Z\geq12.935\right)=0$$

5. **(0.5) ¿En qué cooperativa los beneficios son más homogéneos?**

- **1ª cooperativa:**

$$B_1 \in D\left(\mu_{B_1} = 17.5\ ;\ \sigma^2_{B_1} = 66.\widehat{6}\right)$$

$$\Rightarrow CV_1 = \frac{\sigma_1}{\mu_1} = \frac{\sqrt{66.6666}}{17.5} = 0.4665 \Rightarrow 46.65\%$$

- **2ª cooperativa:**

$$B_2 \in U(5,25) \Rightarrow \begin{cases} f(b_2) = \dfrac{1}{20}\ ;\ 5 < B_2 < 25 \\ U\left(\mu_{B_2} = 15;\ \sigma^2_{B_2} = 33.\widehat{3}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow CV_2 = \frac{\sigma_2}{\mu_2} = \frac{\sqrt{33.333}}{15} = 0.3849 \Rightarrow 38.49\%$$

La 2ª cooperativa presenta mayor homogeneidad en los beneficios. $CV_2 < CV_1$

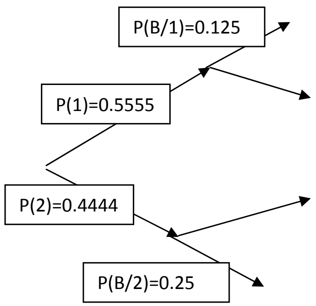
6. **(1) En la ciudad en estudio, se ha elegido a un comerciante al azar y se ha comprobado que tiene unos beneficios comprendidos en 5 y 10 unidades monetarias, ¿probabilidad de que pertenezca a la 2ª cooperativa?.**

Sean los sucesos: "1" ≡ "pertenecer a la Cooperativa nº 1"
"2" ≡ "pertenecer a la Cooperativa nº 2"
"B" ≡ "tener unos beneficios comprendidos entre 5 y 10 unidades monetarias"

según el enunciado del ejercicio: $P(1) = \frac{50}{90} = 0.\widehat{5}$; $P(2) = \frac{40}{90} = 0.\widehat{4}$..

$P\left(B/1\right) = 0.125$, según el apartado 2.

$$P\left(B/2\right) = P(5 < B_2 < 10) = \int_5^{10} 1/20\, db_2 = 0.25$$



Se nos pide:

$$P\left(2/B\right) = \frac{P(2) \times P\left(B/2\right)}{P(1) \times P\left(B/1\right) + P(2) \times P\left(B/2\right)}$$

Por aplicación de Teorema de Bayes.

Sustituyendo valores:

$$P\left(2/B\right) = \frac{0.4444 \times 0.25}{0.5555 \times 0.125 + 0.4444 \times 0.25} = 0.6153$$

El gerente de la 2ª cooperativa asegura que sus cooperativista obtienen mayores beneficios que los de la 1ª, y para apoyar tal afirmación se toman sendas muestras en ambas cooperativas que arrojan los siguientes resultados:

$$\sum_{i=1}^{30} X_{1_i} = 470 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{30} X^2_{1_i} = 8622 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{25} X_{2_i} = 387 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{25} X^2_{2_i} = 6803$$

Datos muestrales:

- **1ª Cooperativa**

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} X_{1_i} = \frac{470}{30} = 15.\widehat{6}$$

$$S_1^2 = \left(\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} X^2_{1_i}\right) - \overline{X}_1^2 = \frac{8622}{30} - 15.\widehat{6}^2 = 41.9556 \Rightarrow S_1 = 6.4773$$

$$\overline{S}_1^2 = \frac{30}{29} S_1^2 = \frac{30}{29} \times 41.9556 = 43.4023 \Rightarrow \overline{S}_1 = 6.588$$

- **2ª Cooperativa**

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_{2_i} = \frac{387}{25} = 15.48$$

$$S_2^2 = \left(\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X^2_{2_i}\right) - \overline{X}_2^2 = \frac{6803}{25} - 15.48^2 = 32.4896 \Rightarrow S_2 = 5.6999$$

$$\overline{S}_2^2 = \frac{25}{24} S_2^2 = \frac{25}{24} \times 32.4896 = 33.8433 \Rightarrow \overline{S}_2 = 5.8175$$

7. **(0.5) En el supuesto de que las varianzas poblacionales son iguales, ¿Cuánto vale dicha varianza?.**

de acuerdo con los resultados muestrales:

$$S^2 = \frac{30 \times 41.9556 + 25 \times 32.4896}{30 + 25 - 2} = \frac{2070.908}{53} = 39.0737$$

8. **(1) ¿Lleva razón el citado gerente?. Nivel de significación del 2.5%**

Se nos está pidiendo el siguiente test de hipótesis: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$

Deberíamos comprobar si varianzas poblacionales, desconocidas, son iguales o distintas, el test correspondiente no sería necesario realizar, puesto que en el apartado anterior hemos supuesto que son iguales, pero así y todo vamos a realizarlo.

- Test de hipótesis: $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$

- Estadístico en estudio, si H_0 es cierta: $F=\dfrac{(n_2-1)n_1S_1^2}{(n_1-1)n_2S_2^2}=\dfrac{\overline{S}_1^2}{\overline{S}_2^2}\in F_{(n_1-1\,;\,n_2-1)}$
- Región de aceptación, si H_0 es cierta: $C_0=\left(F_{1-\alpha/2;(n_1-1\,;\,n_2-1)}\ ;\ F_{\alpha/2;(n_1-1\,;\,n_2-1)}\right)$

Sustituyendo datos muestrales:

$$F=\frac{(n_2-1)n_1S_1^2}{(n_1-1)n_2S_2^2}=\frac{\overline{S}_1^2}{\overline{S}_2^2}=\frac{24\times 30\times 41.9556}{29\times 25\times 32.4896}=\frac{43.4023}{33.8433}=1.2824$$

Al no disponer de tablas de la distribución F para $\alpha/2=0.0125$, realizamos el test para $\alpha=0.10$

$$\alpha=0.10\Rightarrow\begin{cases}F_{0.95;(29\,;24)}=\dfrac{1}{F_{0.05;(24\,;29)}}\approx\dfrac{1}{1.8874}=0.5298\\ F_{0.05;(29\,;24)}\approx 1.9390\end{cases}\Rightarrow C_0=(\ 0.5298;1.9390\ )$$

A nivel de significación del 10% concluimos que las varianzas poblacionales, desconocidas, podemos suponerlas iguales, y por tanto llegamos a la misma conclusión al nivel de significación pedido el 2.5%.

- ✓ **Volviendo al test de medias:**

  - ➢ Test de hipótesis: $\begin{cases}H_0:\mu_1\geq\mu_2\\ H_1:\mu_1<\mu_2\end{cases}$

    - o Estadístico en estudio, si H_0 es cierta: $T=\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\in t_{(n_1+n_2-2)}$

siendo $S^2=\dfrac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2-2}$ la estimación de la varianza poblacional desconocida e igual para ambas poblaciones. (ya se calculó en el apartado anterior)

- o Región de aceptación, si H_0 es cierta: $C_0=\left(-t_{\alpha;(n_1+n_2-2)}\ ;\ +\infty\right)$

Sustituyendo:

$$T=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\frac{15.\hat{6}-15.48}{\sqrt{39.0737}\sqrt{\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{25}}}=0.1102$$

$$\alpha=0.025\Rightarrow C_0=\left(-t_{0.025;(53)}\ ;\ +\infty\right)\approx(-2\ ;\ +\infty)$$

Como $T=0.1102\in C_0=(-2\ ;\ +\infty)$ Aceptamos la hipótesis nula, es decir, los resultados muestrales NO avalan la hipótesis del gerente de la 2ª Cooperativa.

Se estudia en la ciudad en cuestión la disponibilidad de dicho producto: (1 ≡ "hay existencias", 0 ≡ "No hay existencias" -1 ≡ "No hay existencias y se ha realizado un pedido a fábrica"), y se ha llegado a la conclusión que sigue una v.a. cuya función de probabilidad es:

$$\mathbf{P(X=x)=2^{1-x^2}p^{1-x}(1-p)^{1+x}\ \ ;\ X=-1,0,1}$$

de la que se sabe que: $\mu=1-2p$ y $\sigma^2=2p(1-p)$ y siendo p un parámetro a determinar.

Tomada una muestra aleatoria simple:

1, 1, 0, -1, 0, 1, -1, 1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, 0, 1, 1, -1, -1, 0

9. (1) Valor del parámetro p viable con la muestra.

(ver Boletín nº 5 ejercicio 15)

- **Obtención del estimador del parámetro p por máxima verosimilitud.**

  - Función de Verosimilitud.

$$L(\overline{X};p)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)=2^{1-x_1^2}p^{1-x_1}(1-p)^{1+x_1}\times 2^{1-x_2^2}p^{1-x_2}(1-p)^{1+x_2}\times\ldots\times 2^{1-x_n^2}p^{1-x_n}(1-p)^{1+x_n}=$$

$$=2^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i^2)}p^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)}$$

  - Logaritmo Neperiano de la Función de Verosimilitud.

$$Ln\left[L(\overline{X};p)\right]=Ln\left[2^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i^2)}p^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right]=Ln\left(2^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i^2)}\right)+\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\times Ln\,p+\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)Ln(1-p)$$

  - Derivada del Logaritmo Neperiano de la Función de Verosimilitud, con respecto al parámetro.

$$\frac{\partial Ln\left[L(\overline{X};p)\right]}{\partial p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)}{1-p}$$

  - Igualando a cero y haciendo operaciones.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)}{1-p}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)-p\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)=p\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)$$

$$n-\sum_{i=1}^{n}X_i-p\left(n-\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=p\left(n+\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\ ;\ \ n-\sum_{i=1}^{n}X_i-np+p\sum_{i=1}^{n}X_i=np+p\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$n-\sum_{i=1}^{n}X_i-np=np\ \ ;\ 2np=n-\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$p=\frac{n-\sum_{i=1}^{n}X_i}{2n}\Rightarrow \underline{\hat{p}=\frac{1}{2}-\frac{\overline{X}}{2}}$$

Para la muestra dada:

$n=20$; $\overline{X}=0.1$; $S=0.83066$

Por tanto: $\hat{p}=\frac{1}{2}-\frac{\overline{X}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{0.1}{2}=\underline{0.45}$

10. (1) Determinar si es consistente.

Determinaremos en primer lugar si el estimador obtenido es Insesgado.

- Será Insesgado si: $E[\hat{p}]=p$

$$E[\hat{p}]=E\left[\frac{1}{2}-\frac{\overline{X}}{2}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}E\left[\overline{X}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times(1-2p)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+p\right)=p$$

Es Insesgado

- Será Consistente, cuando siendo al menos asintóticamente Insesgado $V(\hat{p})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$$V[\hat{p}]=V\left[\frac{1}{2}-\frac{\overline{X}}{2}\right]=\left(-\frac{1}{2}\right)^2V\left[\overline{X}\right]=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V[X_i]=\frac{1}{4}\times\frac{1}{n}\times 2p(1-p)=\frac{p(1-p)}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Es Consistente

Si se hubiera aplicado el Método de los Momentos:

$$\alpha_i=a_i\quad\forall i=1,2,...\quad\left.\begin{cases}\alpha_1=\mu=1-2p\\ a_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}\end{cases}\right\}\Rightarrow 1-2p=\overline{X}$$

despejando:

$$\hat{p}=-\frac{\overline{X}}{2}+\frac{1}{2}$$

El estimador obtenido coincide con el de Máxima Verosimilitud.

La 2ª Cooperativa contrata a un becario y le pide que obtenga un modelo de regresión para estimar los Beneficios en función de la Disponibilidad del producto. El becario y para una muestra de 8 observaciones proporciona los dos modelos siguientes:

$$\begin{cases}\textbf{recta } B/D \rightarrow D=2\hat{B}-1\\ \textbf{recta } D/B \rightarrow B=3\hat{D}-9\end{cases}$$

también proporciona los residuos correspondientes a la primera de ellas.

Los resultados son:

Residuos:

D_i	**-1**	**-1**	**0**	**-1**	**1**	**1**	**1**	**0**
$e_i(B/D)$	**10**	**-8**	**2**	**-4**	**6**	**2**	**-3**	**-5**

11. (1) Razonando la respuesta, ¿son posibles estos resultados?

Las dos rectas propuestas: $\begin{cases}\text{recta } B/D \rightarrow D=2\hat{B}-1\\ \text{recta } D/B \rightarrow B=3\hat{D}-9\end{cases}$

pueden escribirse de otra forma, despejando correctamente $\hat{B}$ y $\hat{D}$:

$$\begin{cases}\text{recta } B/D \rightarrow \hat{B}=\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}\\ \text{recta } D/B \rightarrow \hat{D}=\frac{1}{3}B+3\end{cases}$$

- **Los coeficientes de regresión $b_{B/D}$ y $b'_{D/B}$ para una misma serie de datos, deben tener el mismo signo**, (además deben de tener el mismo signo que tenga la covarianza entre las dos variables en estudio S_{BD}).

Como $b_{B/D}=\frac{1}{2}$ y $b'_{D/B}=\frac{1}{3}$ tienen el mismo signo (positivo) podemos afirmar que:

<u>en principio ambas rectas pueden ser correctas</u>

ya que desconocemos los datos y no podemos calcularlas.

- Sin embargo:

Ambas rectas deben de pasar por el Centro de Gravedad de la nube de puntos, (conclusión de la 1ª ecuación normal), es decir:

$$\begin{cases} \overline{B} = \frac{1}{2}\overline{D} + \frac{1}{2} \\ \overline{D} = \frac{1}{3}\overline{B} + 3 \end{cases}$$

y resolviendo el sistema anterior, se obtendrán los valores medios de ambas variables.

$$\left.\begin{cases} \overline{B} = \frac{1}{2}\overline{D} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\overline{D} = \frac{1}{6}\overline{B} + \frac{3}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \overline{B} - \frac{1}{6}\overline{B} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{\overline{B} = \frac{12}{5} = 2.4}$$

$$\overline{D} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{5} + 3\,; \; \boxed{\overline{D} = \frac{19}{5} = 3.8}$$

A partir de los datos aportados en la tabla de residuos, $\overline{D} = 0$, y por tanto:

<u>Al menos una de las rectas dadas como solución ó las dos rectas no son correctas</u>.

- **También se podría resolver:**

Si la primera recta es correcta, debe pasar por el centro de gravedad de la nube de puntos, es decir, $\overline{B} = \frac{1}{2}\overline{D} + \frac{1}{2}$, y como $\overline{D} = 0$ según los resultados proporcionados en la tabla de resultados

$$\overline{B} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

El centro de gravedad será pues: $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

Si la segunda recta es correcta, debe pasar por el centro de gravedad de la nube de puntos, es decir, $\overline{D} = \frac{1}{3}\overline{B} + 3$ y como $\overline{D} = 0$

$$0 = \frac{1}{3}\overline{B} + 3 \Rightarrow \overline{B} = -9$$

El centro de gravedad será pues: $(0; -9)$

Como el centro de gravedad debe ser único, a*<u>l menos una de las rectas dadas como solución ó las dos rectas no son correctas</u>*.

- **En cuanto a los residuos proporcionados:**

D_i	-1	-1	0	-1	1	1	1	0
$e_i\left(B/D\right)$	10	-8	2	-4	6	2	-3	-5

Como consecuencia de las ecuaciones normales, al aplicar el método de mínimos cuadrados para obtener un modelo de regresión, se tiene:

✓ De la 1ª ecuación normal: $\overline{e} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 10 - 8 + 2 - 4 + 6 + 2 - 3 - 5 = 0$$

La media residual es cero y por tanto cumple el resultado de la primera ecuación normal,

✓ De la 2ª ecuación normal: $\mathrm{Cov}(D, e) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} D_i e_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i e_i = \left((-1)\times 10\right) + \left((-1)\times(-8)\right) + \left(0 \times 2\right) + \left((-1)\times(-4)\right) + \left(1 \times 6\right) + \\ + \left(1 \times 2\right) + \left(1 \times (-3)\right) + \left(0 \times (-5)\right) = 7$$

La covarianza residuos-variable independiente, no es nula, no cumple el resultado de la segunda ecuación normal, luego concluimos que:

<u>los residuos obtenidos no son posibles.</u>

Por consiguiente: **los resultados dados por el becario NO SON POSIBLES.**